

## О выделении резонансных составляющих из эмпирических кривых и гиперповерхностей

**1. Введение.** В работе [1] исследована скалярная задача о падении плоской электромагнитной волны на периодическую решетку из тонких металлических лент, размещенную на слое диэлектрика. Снизу слой диэлектрика экранирован металлической пластиной. Задача сведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, приближенное решение которой может быть найдено методом усечения.

В периодической частично экранированной структуре выделена элементарная ячейка в виде прямоугольника, ширина которого равна периоду решетки и высота совпадает с толщиной слоя. Исследованы потоки энергии электромагнитного поля через стенки элементарной ячейки.

Установлено, что величина потока энергии через боковую стенку ячейки и направление переноса энергии (влево или вправо) зависят от угла падения исходной волны  $\theta$  и величины  $q$  — отношения ширины щели к периоду решетки. Как показал вычислительный эксперимент, существует конечное число значений угла падения волны и соотношений между размером щели и периодом решетки, при которых поток энергии через стенку ячейки (сечение слоя) достигает экстремума. Поставим вопрос: можно ли считать, что экстремумы потока энергии электромагнитного поля через сечение частично экранированного слоя имеют резонансную природу?

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений принято называть резонансом резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты внешней силы к собственной частоте (см., например, [2], гл. 2, §10).

В данной работе предложен один из возможных способов анализа экспериментальных данных на наличие резонансов.

**2. Постановка задачи.** Пусть в результате физического или вычислительного эксперимента при различных значениях

параметра  $x$  найдены значения некоторой величины  $y$ . Есть ли основания утверждать, что зависимость  $y = y(x)$  имеет резонансный характер?

Можно проводить дополнительные исследования в окрестностях точек, значения функции в которых существенно отклоняются от среднего значения. В данной работе предпринята попытка ответить на вопрос о резонансе в том случае, когда проведение дополнительных исследований по каким-либо причинам неудобно или невозможно.

В общем случае речь идет о выделении в найденной функции отдельных слагаемых, описывающих резонансное поведение исследуемой величины в окрестностях некоторых значений параметра.

**3. Одномерный случай.** Пусть имеется система точек на плоскости  $(x_j, y_j)$ ,  $j = 1..n$ . Назовем *невозбужденными* точки, не подверженные проявлениям резонанса. Будем считать, что  $y_j \geq 0$ , и невозбужденные точки имеют ординаты, близкие к нулю.

Рассмотрим одномерную задачу аппроксимации эмпирической кривой, построенной по системе точек на плоскости  $(x_j, y_j)$ ,  $j = 1..n$ , суммой гауссовых кривых вида

$$\Gamma_m(x) = \sum_{k=1}^m \gamma_k(x), \quad \gamma_k(x) = a_k e^{-b_k(x - c_k)^2}. \quad (1)$$

Для определения параметров аппроксимации  $a_k, b_k, c_k$  и  $m$  применим метод наименьших квадратов

$$\sum_{j=1}^n [\Gamma_m(x_j) - y_j]^2 \rightarrow \min.$$

Чтобы найти начальное приближение, используем следующий эвристический алгоритм.

Среди экспериментальных точек  $(x_j, y_j)$  найдем точку с наибольшей ординатой и положим  $c_1 = x_j$ ,  $a_1 = y_j$ . Значение  $b_1$  найдем методом наименьших квадратов, учитывая точку  $(x_j, y_j)$  и несколько ближайших к ней. Затем положим  $(x'_j, y'_j) = (x_j, y_j - \Gamma_1(x_j))$ . Среди точек  $(x'_j, y'_j)$  также найдем точку с наибольшей ординатой и положим  $c_2 = x'_j$ ,  $a_2 = y'_j$  и так далее.

На шаге с номером  $m$  найдем числа  $a_m, b_m, c_m$  и точки  $(x'_j, y'_j) = (x_j, y_j - \Gamma_m(x_j))$ . Продолжать этот процесс можно, например, до тех пор, пока  $\max_{j=1..n} \{y'_j\} > \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  выбирается а priori.

Целесообразно выбирать  $\varepsilon$ , исходя из ординат экспериментальных точек, например,  $\varepsilon = C \max_{j=1..n} \{y_j\}$ . Величина  $C \in (0, 1)$  определяет, какое отклонение от "нормального" состояния (в данном случае  $y = 0$ ) необходимо учитывать, а каким можно пренебречь. Это зависит от величины шума, допускаемого экспериментом.

У полученной функции  $\Gamma_m(x)$  найдем точки локального экстремума. По построению ясно, что эта функция не имеет точек локального минимума и существует конечное число точек локального максимума, не превосходящее  $m$ . Пусть это  $(\xi_i, \Gamma_m(\xi_i))$ ,  $i = 1..l$ . Добавим эти точки ко множеству экспериментальных точек  $(x_j, y_j)$ ,  $j = 1..n$  и повторим алгоритм выделения гауссовых кривых.

Через некоторое количество таких итераций величины  $a_k, b_k, c_k$  и  $m$  стабилизируются, причем число слагаемых  $m$  функции  $\Gamma_m(x)$  с каждым последующим шагом будет либо убывать, либо оставаться неизменным. Таким образом, будет ясна общая картина поведения исследуемой функции. При необходимости значения  $a_k, b_k, c_k$  можно уточнять методом наименьших квадратов.

Несложно описать подобный алгоритм при отсутствии условия неотрицательной определенности чисел  $y_j$ . Однако, в некоторых случаях прослеживается общая закономерность поведения точек  $(x_j, y_j)$ , т.е. невозбужденные точки имеют ординаты  $y_j \neq 0$ . Тогда удобно рассматривать функцию  $\tilde{\Gamma}_m(x) = \Gamma_m(x) + f_0(x)$ , где функция  $f_0(x)$  подбирается по заданным точкам, исходя из условия  $\eta_T^2 \rightarrow 1$ , где  $\eta_T^2$  - теоретическое корреляционное отношение (см., например, [4], гл. IX, §9.6). Это условие позволяет не принимать во внимание возбужденные точки и строить функцию  $f_0(x)$  исходя из общего поведения экспериментальных данных. Рассмотрим точки  $(x_j; y_j - f_0(x_j))$ . К невозбужденным точкам  $(x_j, y_j)$  применимо условие  $y_j - f_0(x_j) \ll \max_{j=1..n} \{y_j\}$ . Следовательно, задача сведена к рассмотренной выше.

**4. Анализ полученных слагаемых.** В предыдущей части получена функция  $\Gamma_m(x)$ , аппроксимирующая эксперименталь-

ные точки. Однако, не все ее слагаемые  $\gamma_k(x)$  можно рассматривать как проявление резонанса. Пусть  $S_k$  - площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $\gamma_k(x)$  и осью абсцисс,

$$S_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_k(x) dx = a_k \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b_k(x-c_k)^2} dx. \quad (2)$$

Рассмотрим величину  $l_k = S_k/a_k$ . Ее геометрический смысл - ширина прямоугольника, площадь которого  $S_k$ , а высота равна  $a_k$ . Такой прямоугольник будем называть *характеристическим* по отношению к функции  $\gamma_k(x)$ . Назовем *крутизной* гауссовой кривой  $\gamma_k(x)$  отношение

$$K(\gamma_k) = \frac{a_k}{l_k} = \frac{a_k^2}{S_k}.$$

Чем больше эта величина, тем "острее" рассматриваемая кривая. Для каждой задачи можно выбирать пороговое значение крутизны и, исходя из этого, определять, описывает данная кривая явление резонанса или нет.

**5. Многомерный случай.** На практике часто приходится оценивать экспериментальные данные, зависящие от нескольких параметров. Пусть имеется система точек  $(\tilde{x}_j, y_j)$ ,  $j = 1..n$ , где  $\tilde{x}_j = (x_{j1}, \dots, x_{jp}) \in R^p$ . Будем аппроксимировать гиперповерхность, построенную по этим точкам, суммой гауссовых составляющих вида

$$\gamma_k(\tilde{x}) = a_k \exp\left(-\sum_{i,j=1}^p b_{kij}(x_i - c_{ki})(x_j - c_{kj})\right), \quad \gamma_k : R^p \rightarrow R. \quad (3)$$

Алгоритм нахождения начального приближения можно описать по аналогии с одномерным случаем. Что касается качественного анализа, то многомерная задача существенно сложнее: появляются резонансные явления разных рангов. Это определяется количеством слагаемых в каноническом виде квадратичной формы, стоящей в показателе экспоненты (3). В невырожденном случае (в каноническом виде квадратичная форма имеет ровно

$p$  слагаемых) явление резонанса имеет место лишь при определенных значениях каждого из параметров. Однако, возможны и различные вырожденные функции  $\gamma_k(\bar{x})$ , мало зависящие от одного или нескольких параметров. В многомерном случае понятие крутизны необходимо определять для каждой гиперповерхности, так как оно будет связано с ее рангом.

**6. Примеры.** Рассмотрим конкретную одномерную задачу. Имеется  $n = 28$  точек на плоскости, полученных в результате некоторого эксперимента. С помощью описанного выше алгоритма построены три гауссовы кривые  $y = \gamma_k(x)$ , и для каждой кривой – характеристические прямоугольники (Рис. 1).

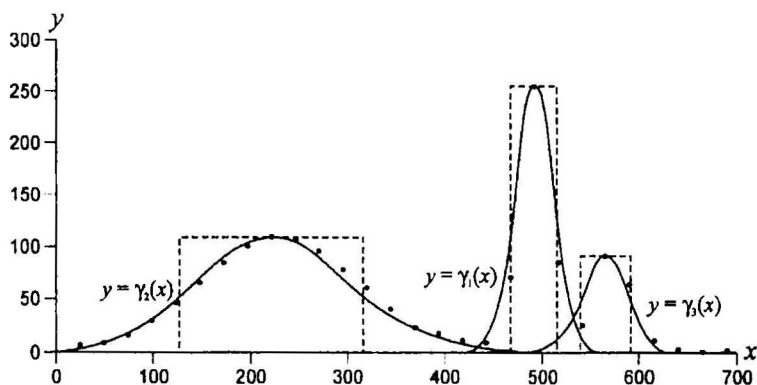


Рис. 1

Параметры  $a_k, b_k, c_k$  для каждой кривой, а также  $K(\gamma_k)$  – их крутизна – указаны в таблице.

$j$	$a_j$	$b_j$	$c_j$	$l_j$	$S_j$	$K_j$
1	264.0	$1.27 \cdot 10^{-3}$	495.0	46.8	$12.35 \cdot 10^3$	5.64
2	114.0	$0.08 \cdot 10^{-3}$	225.0	175.0	$19.9 \cdot 10^3$	0.65
3	96.0	$0.85 \cdot 10^{-3}$	575.0	51.9	$4.9 \cdot 10^3$	1.85

Пусть для данной задачи пороговое значение крутизны равно единице. Тогда кривые  $\gamma_1(x)$  и  $\gamma_3(x)$ , несомненно, описывают явления резонанса, а кривая  $\gamma_2(x)$ , скорее всего, определяет

общую закономерность процесса ( $\gamma_2(x)$ ) должна рассматриваться как функция  $y = f_0(x)$ ), т.к. ее крутизна  $K(\gamma_2) = 0.65 < 1$ .

Рассмотрим задачу, описанную в начале работы. Имеется  $n = 70$  точек в трехмерном пространстве, описывающие зависимость потока энергии электромагнитного поля от двух параметров ( $\theta \in \{0.0, \dots, 0.94\}$  – по столбцам,  $q \in \{0.0, \dots, 1.0\}$  – по строкам)

	0.0	0.16	0.31	0.47	0.63	0.79	0.94
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.11	0.0	-0.01	-57.4	33.46	0.02	0.0	0.0
0.22	0.0	-0.19	<b>-5022.24</b>	<b>3813.18</b>	0.27	0.03	0.0
0.33	0.0	-0.84	-506.75	197.55	1.33	0.2	0.0
0.44	0.0	-1.97	-718.3	<b>3458.72</b>	3.61	0.55	0.05
0.56	0.0	-2.97	-6533.54	<b>15237.75</b>	5.41	0.92	0.15
0.67	0.0	-3.33	<b>-8203.38</b>	15295.98	5.58	1.09	0.22
0.78	0.0	-2.78	-6708.84	18355.7	6.23	1.22	0.22
0.89	0.0	-1.06	-882.1	27895.78	8.82	1.49	0.24
1.0	0.0	2.35	13.31	<b>28340.26</b>	16.68	2.8	0.6

Вычисления показали, что можно выделить шесть резонансных составляющих, их условные вершины выделены в таблице жирным шрифтом.

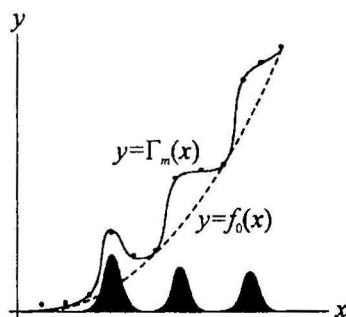


Рис 2.

При исследовании этого примера обнаружен следующий эффект. Пусть по экспериментальным точкам построена аппроксимирующая функция  $y = \Gamma_m(x)$  (рис. 2, сплошная линия). На

первый взгляд кажется, что вся эта кривая – проявление одного резонанса с большой амплитудой. Но этот интуитивно очевидный факт не соответствует действительности. Выделим начальную функцию  $y = f_0(x)$ , ее график показан пунктиром. Вычитая ее из функции  $y = \Gamma_m(x)$  получим, что в разности можно выделить три резонансных составляющих (закрашенные области на графике).

Таким образом, волнообразные кривые и гиперповерхности часто содержат в себе несколько резонансных кривых или гиперповерхностей, для корректного выделения которых необходимо строить начальную функцию  $f_0(x)$ . Но описанный выше алгоритм позволяет найти условные области проявления резонанса без выделения начальной функции. Это не влияет на результат анализа, т.к. данный метод позволяет провести только качественную оценку. Количественная оценка резонансных явлений (нахождение точных вершин и амплитуды) возможна лишь после проведения дополнительных исследований.

## Литература

- [1] Лапина Е.Г. Энергетические характеристики и оптимизация параметров экранированного слоя диэлектрика с периодической решеткой // Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского. Т.2. Итерационные методы решения линейных и нелинейных сеточных задач. Казанск. матем. об-во. Матер. Всеросс. мол. шк.-конф. – Казань: УНИПРЕСС, 1999. – С.229–234.
- [2] Карташев А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1980.
- [3] Пипшард А. Физика колебаний. – М.: Высш. шк., 1985.
- [4] Математическая статистика / под ред. А.М. Длина/ – М., "Высш. школа", 1975.